Lattice Journal : *Journal of Mathematics Education and Applied* e-ISSN: 2798-4621 p-ISSN: 2798-6470
Vol. 4 No. 1, Januari-Juni 2024 pp. 77-89 DOI: http://dx.doi.org/10.30983/lattice.v4i1.8679

Modul Herediter Noether dan Prima (HNP) Dari Modul Sederhana Chen $A_{\sim}$

Risnawita[1], Fatemeh Savoji[2], Dwi Devi Wulandari[3]*
[1,3]UIN Sjech M. Djamil Djambek Bukittinggi, Bukittinggi, Indonesia
[2]Urmia University, Tehran, Iran

Informasi Artikel
Diterima Redaksi: 30 Mei 2024
Revisi Akhir: 28 Juni 2024
Diterbitkan *Online*: 30 Juni 2024

Kata Kunci
Herediter
Noether
Prima

Korespondensi
E-mail: deviw1626@gmail.com **

A B S T R A C T

Let K be a field and $A_{\sim}$ is line graph with infinite path. Let L is a Leavitt path algebra with correspondence with graph E. Suppose M is a module over ring R (written R- module M), a module M is considered to be hereditary if all its submodules are projective. A module M is called a Noetherian module if M is a finitely generated module. Suppose M is a left module over the gelanggang R (written R- module M). A proper submodule N of M is said to be prime if $rRm = 0$ with $r \in R$ and $m \in M$ implies $m \in N$ or $rM \subseteq N$. In this paper we will look at the characteristics of the hereditary nooetherian and prime modules in the context of Leavitt path algebra. Let L is a Leavitt path algebra, where E is a line graphs with infinite path and M is a module over Leavitt path algebra L, we find that then M is simple modules which is hereditary noetherian and not prime modules.

Misalkan K adalah suatu lapangan dan merupakan graf garis yang lintasannya tak terhingga. Misalkan L adalah aljabar lintasan Leavitt yang berkorespondensi dengan graf E. Misalkan M adalah modul di atas gelanggang R (ditulis R-modul M), modul M dikatakan herediter jika semua submodulnya bersifat proyektif. Modul M disebut modul Noetherian jika M adalah modul yang dibangun secara hingga. Misalkan M adalah modul kiri atas gelanggang R (ditulis R-modul M). Suatu submodul sejati N dari M dikatakan prima jika $rRm = 0$ dengan $r \in R$ dan $m \in M$ mengakibatkan $m \in N$ atau $rM \subseteq N$. Dalam tulisan ini kita akan melihat karakteristik modul herediter noether dan prima dalam konteks aljabar lintasan Leavitt. Misalkan L adalah aljabar lintasan Leavitt, dengan E adalah graf garis yang memuat lintasan tak berhingga. Dan M adalah modul atas aljabar lintasan Leavitt L, kita temukan bahwa M adalah modul sederhana yang merupakan modul herediter Noether dan bukan modul prima.

1. Pendahuluan

Modul atas suatu gelanggang adalah salah satu konsep dasar dalam aljabar abstrak, yang memperluas ide dari ruang vektor. Modul dapat dianggap sebagai generalisasi dari ruang vektor, di mana koefisien untuk perkaliannya berasal dari gelanggang. Modul memainkan peran penting dalam banyak cabang matematika, termasuk dalm teori representasi. Teori representasi sangat berguna dalam mempelajari sifat-sifat aljabar yang bersifat abstrak menjadi lebih sederhana. Salah satu bagian penting yang sedang hangat dikembangkan dalam teori representasi adalah studi tentang aljabar lintasan Leavitt. Melalui teori representasi ini kita akan melihat sifat-sifat modul atas aljabar lintasan Leavitt melalui suatu graf. Aljabar lintasan Leavitt telah menjadi subjek yang menarik dalam teori gelanggang dan teori graf [1]. Struktur dari aljabar ini memiliki banyak aplikasi dalam berbagai bidang matematika, terutama dalam teori graf dan teori gelanggang. Salah satu teori penting dari aljabar lintasan Leavitt adalah studi modul atas aljabar lintasan Leavitt yang dapat dilihat melalui teori representasi, khususnya modul Herediter Noether dan Prima. Suatu gelanggang R disebut gelanggang herediter kiri jika setiap ideal kiri dari R projektif [2]. Suatu modul M dikatakan Herediter jika semua submodulnya bersifat projektif [3]. Pada tahun 2014 Zenghui Gao menemukan suatu gelanggang R merupakan gelanggang Herediter Goreinstein jika setiap submodulnya merupakan submodul Goreinstein Projektif [4]. Selanjutnya, modul M disebut modul noether jika modul M merupakan modul yang didefenisikan dalam [5]. Kemudian, misalkan M adalah modul atas gelanggang R (ditulis R-modul M), submodul $N \neq M$ disebut submodul prima jika $rRm \subseteq N$ dengan r di R dan $m \in M$ mengakibatkan m di N atau $rM \subseteq N$. Lebih jauh lagi, misalkan M adalah modul kiri atas gelanggang R, modul M disebut modul prima jika $rRm = 0$ dengan $r \neq 0$, $r \in R$ dan $0 \neq m \in M$ maka $rM = 0$. Penelitian tentang modul prima telah banyak dilakukan dalam [6][7]. Pada tahun 2012 L.S Mahmood memperkenalkan dan mempelajari konsep submodul prima kecil dan modul prima kecil sebagai generalisasi dari submodul prima dan modul prima, lihat [8]. Selanjutnya, Irawati mengembangkan konsep gelanggang Herediter Noether dan Prima (HNP) menjadi modul HNP dalam [9]. Dalam artikel ini kita akan melihat modul herediter Noether dan prima (HNP) atas aljabar lintasan Leavitt.

Aljabar lintasan merupakan suatu aljabar atas suatu lapangan K yang basisnya merupakan himpunan semua lintasan pada suatu graf berarah E yang selanjutnya kita sebut graf saja. Graf dalam hal ini terdiri dari himpunan titik E^0, himpunan sisi E^1 serta dua pemetaan $r, s : E^1 \to E^0$ yang berturut-turut memetakan setiap sisi $e \in E^1$ ke titik ujungnya $r(e)$ dan ke titik sumbernya $s(e)$ [10]. Setiap aljabar berdimensi hingga dapat digambarkan sebagai suatu graf dan sebaliknya [10]. Pada tahun 2008, Aranda Pino mengkaji tentang syarat perlu dan cukup suatu graf E sedemikian sehingga aljabar lintasan KE bersifat semiprima [1]. Selanjutnya, sifat-sifat aljabar dari suatu aljabar lintasan erat kaitan nya dengan sifat geometris dari graf terkait [11]. Selanjutnya dengan memandang arah sebaliknya dari suatu sisi pada suatu graf maka diperkenalkan suatu aljabar yang kita kenal dengan aljabar lintasan Leavitt. Ara, Moreno, dan Pardo mendefinisikan suatu aljabar lintasan yang disebut dengan aljabar lintasan Leavitt. Aljabar lintasan Leavitt merupakan suatu aljabar lintasan pada graf perluasan yang memenuhi relasi Cuntz-Krieger [1]. Penelitian tentang aljabar lintasan Leavitt telah banyak dilakukan. Pada tahun 2007 telah dikaji syarat perlu dan cukup suatu graf E sehingga aljabar lintasan Leavitt atas suatu lapangan K merupakan aljabar berdimensi hingga [12]. Selanjutnya dalam [13] telah dikaji tentang aljabar lintasan Leavitt yang bersifat noether. Berikutnya penelitian tentang aljabar lintasan Leavitt yang bersifat prima juga telah dilakukan [1], [13] dan [12]. Aljabar lintasan Leavitt bersifat sederhana, Noether, dan prima bergantung kepada struktur dari grafnya. Begitu juga dengan suatu aljabar lintasan Leavitt berdimensi hingga jika grafnya asiklik. Selanjutnya penelitian

http://dx.doi.org/10.30983/ lattice.v4i1.8679

tentang aljabar lintasan Leavitt mulai berkembang ke arah modul atas aljabar lintasan Leavitt. Namun penelitian tentang modul atas aljabar lintasan Leavitt yang bersifat Herediter Noether dan Prima (HNP) belum banyak dilakukan.

Pada tahun 2012, Chen mengkontsruksi modul sederhana atas aljabar lintasan Leavitt dilihat dari graf yang memuat *sink* dan graf yang memuat kelas *tail-equivalent* dari lintasan tak berhingga pada graf Edalam [14]. Selanjutnya, modul ini disebut dengan modul sederhana Chen. Modul sederhana Chen memberikan kontribusi yang sangat penting dalam pengembangan modul atas aljabar lintasan Leavitt. Kemudian, Rangaswamy pada tahun 2015 juga mengembangkan beberapa kelas modul sederhana atas aljabar lintasan Leavitt yang dilihat dari tipe grafnya dengan mengembangkan definisi modul sederhana yang diberikan oleh Chen [15]. Ara dan Rangaswamy juga telah membuktikan bahwa modul sederhana atas aljabar lintasan Leavitt merupakan modul yang disajikan secara hingga (Ara dan Rangaswamy, 2014). Kemudian, jika diberikan aljabar lintasan Leavitt L dan suatu L-modul sederhana S, Rangaswamy menghitung kardinalitas himpunan semua L-modul sederhana yang isomorfik dengan S [16]). Selanjutnya resolusi projektif untuk modul sederhana Chen juga telah dikonstruksi oleh Abrams lihat [17]. Akan tetapi, penelitian tentang modul Herediter Noether dan Prima atas aljabar lintasan Leavitt belum dilakukan.

Berdasarkan latar belakang di atas, artikel ini bertujuan untuk mengkarakterisasi modul Herediter Noether dan Prima dalam konteks aljabar lintasan Leavitt dari suatu graf yang memuat lintasan tak berhingga.

2. Metode Penelitian

Secara umum metode penelitian yang dilakukan adalah metode eksplorasi dan adaptasi dari hasil-hasil yang sudah ada melalui studi literature. Diantaranya melalui teori tentang modul sederhana Chen[14] kemudian kita lakukan eksplorasi dengan melakukan karakterisasi terkait modul Herediter Noether dan Prima berdasarkan teori [3], [5], dan [18].

3. Hasil dan Pembahasan

Hasil

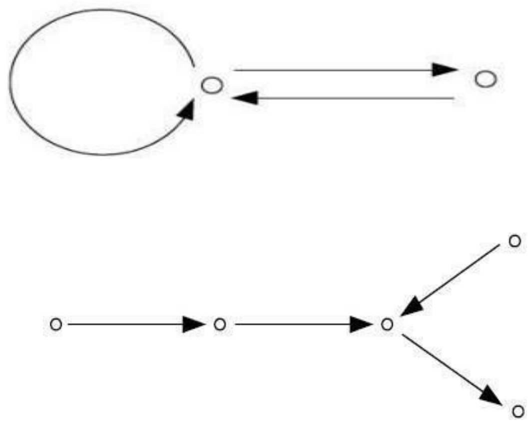
3.1 Aljabar Lintasan

Pada bagian ini akan diberikan beberapa teori dasar yang akan digunakan pada penelitian ini. Dalam bagian ini akan dikaji bahwa setiap aljabar berdimensi hingga atas lapangan K yang tertutup secara aljabar berkorespondensi dengan suatu graf berarah.

http://dx.doi.org/10.30983/ lattice.v4i1.8679

Definisi 1. [10] Suatu graf berarah adalah empat terurut $E = (E^0, E^1, r, s)$ yang terdiri dari dua himpunan E^0 (yang unsur-unsurnya disebut titik), E^1 (yang unsur-unsurnya dinamakan sisi), dan dua pemetaan $r, s : E^1 \to E^0$ yang berturut-turut memetakan setiap sisi $e \in E^1$ ke titik ujungnya $r(e)$ dan ke titik sumbernya $s(e)$.

Contoh graf:



Gambar 1. Graf

Dari definisi di atas jelas bahwa graf berarah yang dimaksud adalah graf dengan banyaknya sisi antara dua titik bisa lebih dari satu (pada teori graf biasa disebut adanya sisi ganda) dan membolehkan adanya loop atau siklus berarah. Dalam menggambarkan graf berarah kita mempresentasikan unsur-unsur E^0 sebagai titik titik dan unsur-unsur E^1 sebagai sisi yang mengarah ke titik akhirnya. Selanjutnya, graf berarah ini disebut graf saja.

Graf E dikatakan graf baris-berhingga (*row finite graph*) jika $s^{-1}(v)$merupakan himpunan berhingga untuk setiap $v \in E^0$, dan E disebut graf berhingga (*finite graph*) jika himpunan titik E^0 berhingga [13]. Misalkan $E = (E^0, E^1, r, s)$ suatu graf, dan $a, b \in E^0$. Suatu lintasan dengan panjang $l \geq 1$ dengan titik awal a dan titik akhir b (atau disingkat: lintasan dari a ke b)adalah barisan $(a|\alpha_1,{}^1\alpha_2, \ldots, \alpha_\ell|b)$, dengan $a_k \in E^1$ untuk semua $1 \leq k \leq \ell$, dan $s(a_1) = a$, $r(a_k) = s(a_{k+1})$ untuk setiap $1 \leq k < \ell$ serta $r(a_\ell) = b$. Secara singkat suatu lintasan dapat dinotasikanoleh a_1a_2 a_ℓ dan dapat dideskripsikan sebagai berikut: Setiap titik $v \in E^0$ diasosiasikan dengan lintasan yang panjangnya 0 dan disebut sebagai lintasan trivial atau stasioner. Sedangkan setiap sisi $e \in E^1$ disebut dengan lintasan yang panjangnya 1. Lintasan $p = e_1e_2 \cdots e_n$ disebut siklus (*cycle*) jika titik asal dan titik ujungnya sama tetapi tidak ada sisi

http://dx.doi.org/10.30983/ lattice.v4i1.8679

yang diulang, dengan kata lain $r(p) = s(p)$ dan $s(e_i) = s(e_j)$ untuk setiap $i \neq j$. Siklus yang panjangnya 1 disebut *loop*. Graf yang tidak memuat siklus (*cycle*) disebut graf asiklis.

Selanjutnya, diberikan definisi mengenai istilah dari lintasan tertutup dalam suatu graf.

Definisi 2. Misalkan graf $E = (E^0, E^1, r, s)$ suatu lintasan $p = e_1e_2e_3 \dots e_n$ disebut lintasan tertutup *(closed path)* yang berbasis di v jika $r(e_n) = s(e_1) = v$. Himpunan semua lintasan yang tertutup dinotasikan dengan CP(v). Suatu lintasan tertutup p disebut sederhana (simple closed path) jika p tidak melewati basisnya lebih dari satu kali, sedemikian sehingga untuk setiap $j > 1, s(e_j) \neq v$. Himpunan semua lintasan tertutup sederhana dinotasikan dengan CSP (v).

Selanjutnya, diberikan definisi dari operasi perkalian pada lintasan yang berguna untuk mendefinisikan suatu aljabar yang disebut aljabar lintasan. Komposisi lintasan-lintasan dapat mendefinisikan operasi secara parsial pada himpunan semua lintasan pada graf.

Definisi 3. [10] Diberikan graf $E = (E^0, E^1, r, s)$ dan lintasan $\mu = e_1e_2 \dots e_m$ yang titik asal di a dan titik ujung di b, serta $\vartheta = f_1f_2 \dots f_n$ yangtitik asal di c dan titik ujung di d untuk suatu $a, b, c, d \in E^0$, operasi dua lintasan μ dan ϑ adalah:

$$\mu\vartheta = \begin{cases} e_1e_2e_3 \dots e_m f_1 f_2 \dots f_n, & jika\ r(e_m) = s(f_1) \\ 0, lainnya \end{cases}$$

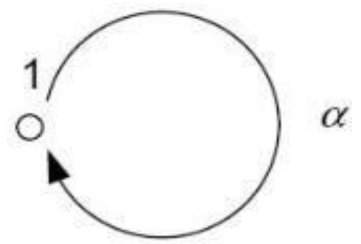
Selanjutnya, diberikan definisi dari aljabar lintasan. Aljabar lintasan atas lapangan K pada graf E dinotasikan dengan KE. Aljabar lintasan KE yang berkorespondensi dengan suatu graf E didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 4. [10] Misalkan E suatu graf. Aljabar lintasan KE adalah K-aljabar yang sebagai K-ruang vektor memiliki basis himpunan semua lintasan $(a|\alpha_1, \dots, \alpha_l|b)$ di E.

Contoh 5.

Misalkan E graf yang terdiri dari satu titik dan satu *loop*. Dari graf di bawah inu maka basis aljabar lintasan KE adalah $\{1, \alpha, \alpha^2, \dots \alpha^\ell, \dots\}$ dan perkalian vektor basis diberikan sebagai berikut: $\varepsilon^1\alpha^l = \alpha^l\varepsilon^1 = \alpha^l$ untuk semua $\ell \geq 0$, dan $\alpha^\ell\alpha^k = \alpha^{\ell+k}$ untuk semua $\ell, k \geq 0$,

http://dx.doi.org/10.30983/ lattice.v4i1.8679



Gambar 2. Graf siklik

dengan $\alpha^0 = \varepsilon^1$Akibatnya KE isomorfik dengan aljabar polinomial $K[t]$ dalam variabel t, dengan ε^1 dipetakan ke 1 dan α dipetakan ke t.

Selain definisi di atas, aljabar lintasan juga memenuhi syarat bahwa setiap titik dalam graf E bersifat idempoten dan perkalian sebarang dua buah titik yang berbeda hasilnya nol. Kemudian untuk setiap sisi e berlaku $s(e)e = er(e) = e$. Pada lema berikut ini akan diberikan beberapa sifat dari aljabar lintasan.

Lema 6. [10] Misalkan E adalah graf dan KE adalah aljabar lintasan maka:

1. KE adalah aljabar asosiatif.
2. KE memiliki unsur identitas jika dan hanya jika E^0 hingga.
3. KE berdimensi hingga jika dan hanya jika E hingga dan tidak memuat siklus

Selanjutnya teorema berikut ini akan menjelaskan bahwa suatu aljabar lintasan terhubung jika dan hanya jika graf yang bersesuaian dengan aljabar tersebut adalah graf terhubung.

Lema 7. [10] Misalkan E suatu graf hingga. Aljabar lintasan KE terhubung jika dan hanya jika E adalah graf terhubung.

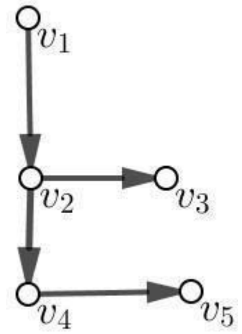
Berikut ini beberapa istilah dalam graf yang akan digunakan, yaitu:

1) Jika $s(e) = v$ dan $r(e) = w$, maka dikatakan bahwa v memancarkan (*emit*) e, dan w menerima e atau e menuju w. Titik $v \in E^0$ disebut sumber jika v tidak menerima setiap sisi, dengan kata lain v sumber jika $v \neq r(e)$ untuk setiap $e \in E^1$ atau $r^{-1}(v) = \emptyset$. Titik v disebut *sink* jika v tidak memancarkan sebarang sisi pada graf E maka v disebut titik regular.
2) Graf E dikatakan baris-hingga jika $s^{-1}(v)$ merupakan himpunan hingga untuk setiap $v \in E^0$, dan E disebut hingga jika E^0 hingga.
3) Jika kardinalitas $s^{-1}(v)=\infty$ maka v disebut *infinite emitter*.
4) Jika v merupakan *sink* atau *infinite emitter* maka v disebut titik singular.

http://dx.doi.org/10.30983/ lattice.v4i1.8679

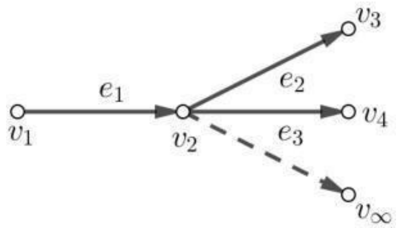
Contoh :

Perhatikan graf berikut ini



Gambar 3. Graf A yang memuat *sink* dan titik singular

Titik v_3 dan v_4 merupakan sink, sedangkan titik lainnya disebut titik regular.



Gambar 4. Graf F dengan v_2 infinite emitter

Untuk selanjutnya kita akan bekerja dengan graf baris hingga. Berikut ini diberikan definisi dari aljabar lintasan Leavitt.

3.2. Aljabar Lintasan Leavitt

Graf E dapat diperluas dengan memandang arah sebaliknya dari sisi-sisi dalam E^1. Sisi dalam E^1 disebut sisi nyata dan sisi dengan arah berlawanan dari sisi nyata disebut sisi hantu. Himpunan semua sisi hantu dalam E dinyatakan dengan E^{1^*}. Graf E yang diperluas didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 8. [1] Diberikan graf $E = (E^0, E^1, r, s)$, aljabar lintasan Leavitt dari graf E dengan koefisien di K adalah K-aljabar yang dibangun oleh himpunan $\{v : v \in E^0\}$ dan himpunan sisi $\{e, e*: e \in E^1\}$ yang memenuhi kondisi berikut:

(1) $s(e)e = e = er(e)$, untuk setiap $e \in E^1$.

(2) $r(e)e* = e* = e*s(e)$, untuk setiap $e^* \in E^1$

http://dx.doi.org/10.30983/ lattice.v4i1.8679

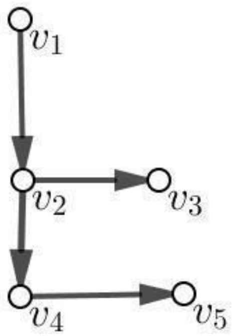
(3) (CK1) $e^{*}f = \delta_{ef}r(e)$, untuk setiap $e, f \in E^1$

(4) (CK2)$v = \sum_{e \in E^1} ee^*$, untuk setiap $v \in E^0$ bukan *sink*

Aljabar ini dinotasikan dengan $L_K(E)$ (cukup disingkat dengan $L(E)$). Syarat (CK1) dan (CK2) disebut relasi Cuntz-Krieger. Secara khusus syarat (CK2) adalah relasi Cuntz-Krieger di v.

Jika v *sink* maka kita tidak harus memiliki relasi (CK2) di v. Syarat baris-hingga dibutuhkan untuk mendefinisikan persamaan (CK2). Suatu lintasan $\mu = e_1e_2e_3 \dots e_m$ dengan $r(e_i) = s(e_{i+1})$, disebut lintasan tertutup jika $r(e_n) = s(e_1)$. Suatu sisi f disebut sisi keluar pada suatu lintasan $\mu = e_1e_2e_3 \dots e_m$ jika tardapat i sedemikian sehingga $s(f) = s(e_i)$ dan $f \neq e_i$. Suatu lintasan tak berhingga p adalah suatu barisan tak berhingga dari sisi-sisi pada graf E, misalkan $p = e_1e_2e_3 \dots e_m \cdots$, dengan $r(e_i) = s(e_{i+1})$, $\forall i \in$ N. Untuk suatu lintasan tak berhingga $p = e_1e_2e_3 \dots e_n$, didefinisikan $\forall n \geq 1$, $\tau_{\leq n}(p) = e_1e_2e_3 \dots e_n$ dan $\tau_{>n}(p) = e_{n+1}e_{n+2} \cdots$. Dua lintasan tak berhingga p dan q disebut *tail-equivalent*, ditulis dengan $p \sim q$ jika terdapat bilangan bulat positif m, n sehingga $\tau_{>n}(p) = \tau_{>m}(q)$. Jelas, ini merupakan suatu relasi ekivalen. Kelas-kelas ekivalen p yang memuat suatu lintasan tak berhingga p dilambangkan dengan $[p]$. Suatu lintasan p disebut lintasan rasional jika p *tail-equivalent* dengan lintasan $q = ccc \cdots$ dengan c adalah suatu lintasan tertutup. Lintasan p disebut lintasan irrasional jika p bukan lintasan rasional.

Contoh: Perhatikan graf berikut ini



Gambar 5. Graf yang memuat sink

Titik v_3 dan v_5 merupakan sink, sedangkan titik lainnya disebut titik regular.

http://dx.doi.org/10.30983/ lattice.v4i1.8679

3.3 Modul Herediter, Noether, Dan Prima

Berikut ini akan diberikan definisi dari modul herediter nother, dan prima.

Definisi 9. Misalkan R sebarang gelanggang. Modul M atas R dikatakan herediter jika M dan semua submodulnya merupakan projektif. [2]

Teorema 10. Misalkan A_∞ (lihat Gambar 3) merupakan graf garis tak hingga dan LK (A_∞) aljabar lintasan Leavitt. Semua modul projektif atas LK (A_∞) adalah herediter.

Gambar 6. Graf A_∞

Selanjutnya diberikan definisi dari Aljabar Herediter kanan dan kiri

Definisi 11. Aljabar A dikatakan herediter kanan jika setiap ideal kanan dari A adalah modul projektif sebagai A-modul. Aljabar herediter kiri didefinisikan sebagai dualnya. [2]

Berikut diberikan karakterisasi pertama dari aljabar herediter kanan.

Teorema 12. Pernyataan berikut adalah ekivalen:[10]

1. A aljabar herediter kanan.
2. Setiap submodul dari A-modul kanan projektif adalah projektif.
3. Setiap submodul dari A-modul kanan projektif dibangun secara hingga adalah projektif.
4. Radikal dari setiap A-modul kanan projektif dibangun secara hingga tak terdekomposisi adalah projektif.

Selanjutnya definisi berikut akan menjalaskan tentang modul noether.

Definisi 13. Modul M disebut modul Noether jika modul M merupakan modul yang dibangun secara hingga. [5]

Dari definisi 13 jelas bahwa untuk modul M yang dibangun secara hingga maka modul M merupakan modul Noether.

Teorema 14 [19]

Misalkan R dan S adalah suatu gelanggang, dengan $R \subseteq S$, maka R adalah S −Noetherian kanan jika dan hanya jika setiap ideal prima sempurna dari R adalah S −berhingga.

http://dx.doi.org/10.30983/ lattice.v4i1.8679

Berikut ini diberikan definisi dari modul prima.

Definisi 15. Modul M disebut modul prima jika $rRm = 0$ dengan $\neq 0$, $r \in R$ dan $0 \neq m \in M$ maka $rM = 0$

Selanjutnya pada teorema berikut kita akan melihat kaitan antara modul sederhana dan modul prima atas gelanggang.

Teorema 16. Jika R gelanggang komutatif, M modul sederhana atas gelanggang R maka M merupakan modul prima.

Bukti:

Misalkan M modul sederhana artinya submodul dari M hanyalah $\{0\}$ dan M. Akan dibuktikan jika $rRm = 0$ dengan $r \in R$ dan $m \in M$ maka $rM = 0$ atau $m = 0$. Misalkan $m = 0$ maka M merupakan modul prima. Misalkan $0 \neq \mathrm{m} \in \mathrm{M}$ dan $rRm = 0$, misalkan submodul $Rm \neq 0$, karena M modul sederhana maka $Rm = M$. Karena $rRm = 0$ maka $r \in Ann\ M$, sehingga M merupakan modul prima.

3.4 Modul atas Aljabar Lintasan Leavitt

Pada tahun 2012, Chen mulai mendefinisikan suatu modul sederhana atas aljabar lintasan Leavitt. Berikut ini diberikan definisi dari modul sederhana atas aljabar lintasan Leavitt, selanjutnya akan disebut modul sederhana Chen.

Definisi 17. [14] (Modul sederhana Chen $V_{[p]}$) Misalkan $V_{[p]}$ merupakan K-ruang vektor dengan basisnya $B = \{q;\ q \in [p]\}$, kita membuat suatu L-modul $V_{[p]}$. Untuk setiap titik u dan sisi e di E. Didefinisikan transformasi linier P_u, S_e, S_{e^*} pada $V_{[p]]}$ dengan mendefinisikan operasi pada basisnya yang dapat didefinisikan sebagai berikut:

1) Untuk setiap lintasan $p \in B$, $P_u(p) = \begin{cases} p, jika\ u = s(p) \\ 0, lainnya \end{cases}$
2) $S_e(p) = \begin{cases} ep,\ jika\ r(e) = s(p) \\ 0, lainnya \end{cases}$
3) $S_{e^*}(u) = 0$
4) $S_{e^*}(p) = \begin{cases} p', jika\ p\ = ep' \\ 0, lainnya \end{cases}$

Operator linier $\{P_u,\ S_e, S_{e^*},\ u\ E^0, e\ \in_e E^1\}$ memenuhi relasi yang ada pada aljabar lintasan Leavitt. Homomorfisma aljabar ϕ dari L ke $\mathrm{End}_K V_{[p]}$ menginduksi u ke P_u, e ke S_e dan e* ke S_{e^*} . Sehingga $V_{[p]}$ dapat dibuat menjadi modul kiri atas L melalui homomorfisma ϕ. Operasi L-modul pada $V_{[p]}$dinotasikan dengan " · " .

Selanjutnya lemma berikut menjelaskan bahwa suatu modul atas aljabar lintasan leavitt yang dibangun oleh suatu lintasan tak berhingga merupakan suatu modul sederhana.

http://dx.doi.org/10.30983/ lattice.v4i1.8679

Lemma 18. [16] Jika p suatu lintasan tak berhingga maka $V_{[p]}$merupakan suatu modul sederhana atas L.

Pembahasan

Pada bagian ini kita akan mengkarakterisasi modul A_∞yang merupakan modul sederhana Chen, kita akan mencek apakah modul ini merupakan modul Herediter, Noether dan Prima.

Teorema Utama

Misalkan E adalah graf seperti Gambar 4 :

Gambar 7.Graf $V_{[p]}$

jika p suatu lintasan tak berhingga maka $V_{[p]}$ merupakan modul herediter noether dan tidak modul prima.

Bukti:

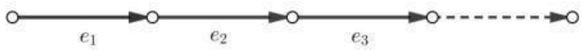
Berdasarkan Teorema 10 maka modul yang bersesuaian dengan graf $V_{[p]}$ mereupakan modul herediter dan modul yang dibangun graf $V_{[p]}$ merupakan modul sederhana. Sehinga $V_{[p]}$ merupakan modul noether, jadi $V_{[p]}$ merupakan modul herediter dan noether. Selanjutnya akan dibuktikan bahwa $V_{[p]}$ bukan modul prima, tanpa mengurangi keumuman, kita bisa melihat kasus grafnya menjadi graf berikut. Misalkan E merupakan graf $V_{[p]}$

Misalkan $r = 5v_1 + 3v_2 - 5e_1 - 3(e_1)*$, $r \in L$, $p_1 = e_1e_2e_3 \cdots$, $p_2 = e_2e_3e_4 \cdots$, $m = p_1 + p_2$, $m \in V_{[p]}$. Maka $rm = (5v_1 + 3v_2 - 5e_1 - 3(e_1)*)(p_1 + p_2) = 5p_1 + 3p_2 - 5p_1 - 3p_2 = 0$. Tetapi, jika kita ambil $m_1 = p_1$ maka
$rm_1 = 5v_1 + 3v_2 - 5e_1 - 3(e_1) * (p_1) = 5p_1 - 3p_2 \neq 0$.
Jadi $r \notin Ann\,V[p]$. Akibatnya $\exists m \neq 0$ dan $r \notin AnnV_{[p]}$ sedemikian sehingga $rm = 0$.
Jadi, $V_{[p]}$ bukan merupakan suatu modul prima.

Jadi $V_{[p]}$ merupakan modul herediter noether dan tidak modul prima.

4. Kesimpulan

Misalkan E merupakan graf $V_{[p]}$, dengan E graf seperti gambar di bawah ini:



Gambar 8. Graf $V_{[p]}$

http://dx.doi.org/10.30983/ lattice.v4i1.8679

1) Jika p suatu lintasan tak berhingga maka $V_{[p]}$ merupakan modul herediter
2) Jika p suatu lintasan tak berhingga maka $V_{[p]}$ merupakan modul noether dan tidak modul prima.

Daftar Pustaka

[1] G. Aranda Pino, E. Pardo, and M. Siles Molina, "Exchange Leavitt path algebras and stable rank," *J. Algebr.*, vol. 305, no. 2, pp. 912–936, 2006, doi: 10.1016/j.jalgebra.2005.12.009.

[2] A. A. Tuganbaev, "Modules over hereditary rings," *Sb. Math.*, vol. 189, no. 3–4, pp. 623–638, 1998, doi: 10.1070/sm1998v189n04abeh000316.

[3] M. S. Shrikhande, "On Hereditary and Cohereditary Modules," *Can. J. Math.*, vol. 25, no. 4, pp. 892–896, 1973, doi: 10.4153/cjm-1973-094-2.

[4] G. Zhao and J. Sun, "Global dimensions of rings with respect to a semidualizing module ∗†," pp. 1–10.

[5] A. U. Ansari and B. K. Sharma, "Graded S-Noetherian Modules," *Int. Electron. J. Algebr.*, vol. 33, no. 33, pp. 87–108, 2023, doi: 10.24330/ieja.1229782.

[6] U. N. M, C. Lomp, and H. Fern, "A Note on Prime Modules," vol. 8, no. 1, pp. 31–42, 2000.

[7] I. E. Wijayanti, "Primeness in Category of Modules and Category of Comodules Over Corings," *J. Indones. Math. Soc.*, vol. 14, no. 1, pp. 13–24, 2012, doi: 10.22342/jims.14.1.58.13-24.

[8] W. A. Ali and N. S. Al Mothafar, "On Quasi-Small Prime Modules," *J. Phys. Conf. Ser.*, vol. 1818, no. 1, 2021, doi: 10.1088/1742-6596/1818/1/012204.

[9] Irawati, "The Generalization of HNP Ring and Finitely Generated Module over HNP Ring," *Int. J. Algebr.*, vol. 5, no. 13, pp. 611–626, 2011.

[10] I. Assem, D. Simson, and a Skowronski, "Elements of the Representation Theory of Associative Algebras: Volume 1: Techniques of Representation Theory," *London Math. Soc. Student Texts*, vol. 1, 2006, [Online]. Available: http://scholar.google.com/scholar?hl=en&btnG=Search&q=intitle:Elements+of+the+Representation+Theory+of+Associative+Algebras#4%5Cnhttp://books.google.com/books?hl=en&lr=&id=SKC79Pt_c9EC&oi=fnd&pg=PA1&dq=Elements+of+the+Representation+Theory+of+Associative+

[11] D. M. Barquero, C. M. González, and I. R. Campos, "Algebraic characterisations of path algebras," pp. 1–28, 2023, [Online]. Available: http://arxiv.org/abs/2310.10580

[12] G. Abrams and G. Aranda Pino, "The Leavitt Path Algebras of Generalized Cayley Graphs," *Mediterr. J. Math.*, vol. 13, no. 1, pp. 1–27, 2016, doi: 10.1007/s00009-014-0464-4.

http://dx.doi.org/10.30983/ lattice.v4i1.8679

[13] G. A. Pino, E. Pardo, and M. S. Molina, "Prime spectrum and primitive Leavitt path algebras," *Indiana Univ. Math. J.*, vol. 58, no. 2, pp. 869–890, 2009, doi: 10.1512/iumj.2009.58.3516.

[14] X. W. Chen, "Irreducible representations of Leavitt path algebras," *Forum Math.*, vol. 27, no. 1, pp. 549–574, 2015, doi: 10.1515/forum-2012-0020.

[15] K. M. Rangaswamy, "On simple modules over Leavitt path algebras," *J. Algebr.*, vol. 423, pp. 239–258, 2015, doi: 10.1016/j.jalgebra.2014.10.008.

[16] K. M. Rangaswamy, "A Survey of Some of the Recent Developments in Leavitt Path Algebras," *Indian Stat. Inst. Ser.*, pp. 3–20, 2020, doi: 10.1007/978-981-15-1611-5_1.

[17] G. Abrams, F. Mantese, and A. Tonolo, "Extensions of simple modules over Leavitt path algebras," *J. Algebr.*, vol. 431, pp. 78–106, 2015, doi: 10.1016/j.jalgebra.2015.01.034.

[18] Risnawita, Irawati, and I. Muchtadi-Alamsyah, "Primeness of Simple Modules Over Path Algebras and Leavitt Path Algebras," *Khayyam J. Math.*, vol. 7, no. 2, pp. 219–231, 2021, doi: 10.22034/kjm.2021.203331.1578.

[19] Z. Bı̇lgı̇n, M. L. Reyes, and Ü. Tekı̇r, "On right S-Noetherian rings and S-Noetherian modules," *Commun. Algebr.*, vol. 46, no. 2, pp. 863–869, 2018, doi: 10.1080/00927872.2017.1332199.

http://dx.doi.org/10.30983/ lattice.v4i1.8679