Lattice Journal : *Journal of Mathematics Education and Applied* e-ISSN: 2798-4621 p-ISSN: 2798-6470
Vol. 4 No. 1, Januari-Juni 2024 pp. 90-101 DOI: http://dx.doi.org/10.30983/lattice.v4i1.8670

Pelabelan *Vertex-Graceful* pada Graf-(5,7)

Gema Hista Medika[1], Zebbil Billian Tomi[2], Mhd Furqan Akbar[3]*, Fifian Fitra Janeva[4], Nuryanuwar[5]
[1,2]Universitas Islam Negeri Sjech M Djamil Djambek Bukittinggi, Bukittinggi, Indonesia
[3]Institut Teknologi Sepuluh Nopember (ITS), Surabaya, Indonesia
[4]Universitas Trisakti, Jakarta, Indonesia
[4]Universitas Fort De Kock Bukittinggi, Bukittinggi, Indonesia
**Corresponding Author*

Informasi Artikel

Diterima Redaksi: 30 Mei 2024
Revisi Akhir: 29 Juni 2024
Diterbitkan *Online*: 30 Juni 2024

Kata Kunci

Pelabelan
Pelabelan *Vertex-Graceful*
Graf-(5,7)

Korespondensi

E-mail: mhdfurqanakbar@gmail.com*

A B S T R A C T

Several previous studies on graceful vertex labeling have been conducted. This study aims to identify graceful vertex labeling on a (5,7)-graph, which consists of 5 vertices and 7 edges. The focus of this study is on a simple and finitely connected (5,7)-graph. This type of research is descriptive qualitative, using literature study techniques and non-statistical data analysis. The results show that of the 4 non-isomorphic (5,7)-graphs, all of the graphs meet the criteria for graceful vertex labeling, namely R1, R2, R3, and R4.

Beberapa studi sebelumnya mengenai pelabelan *vertex-graceful* telah dilakukan. Penelitian ini bertujuan untuk mengidentifikasi pelabelan *vertex-graceful* pada graf-(5,7), yang terdiri dari 5 titik dan 7 sisi. Fokus penelitian ini adalah pada graf-(5,7) yang sederhana dan terhubung berhingga. Tipe penelitian ini adalah deskriptif kualitatif, menggunakan teknik studi pustaka dan analisis data non statistik. Hasil penelitian menunjukkan bahwa dari 4 graf-(5,7) yang tidak isomorfik, semua grafnya memenuhi kriteria pelabelan *vertex-graceful*, yaitu R1, R2, R3, dan R4.

1. Pendahuluan

Salah satu ilmu yang berperan penting dalam kehidupan sehari-hari adalah matematika. Begitu banyak permasalahan yang diselesaikan dengan menggunakan rumus, pola/ model atau teorema matematika dalam kehidupan. Seiring perkembangan ilmu pengetahuan banyak bermunculan penggunaan rumus matematika ataupun penalaran matematika sebagai solusi untuk membantu permasalahan dalam berbagai disiplin ilmu. Salah satu bidang matematika yang banyak dimanfaatkan yaitu teori graf.

Teori graf pertama kali diperkenalkan oleh Leunhard Euler pada tahun 1936, merupakan seorang matematikawan yang berkebangsaan Swiss. Ketika itu Euler berupaya memecahkan masalah jembatan Konigsberg yang berada di Eropa. Salah satu tema dari teori graf yang berkembang pesat yaitu pelabelan graf. Pelabelan graf ini pertama kali diperkenalkan oleh Sadlak pada tahun 1964, dilanjutkan Stewart pada tahun 1966 dan Kotzig Rosa tahun 1970. Pemanfaatan pelabelan graf dapat diterapkan pada berbagai bidang keilmuan seperti teori pengkodean, radar, desain sirkuit, manajemen basis data, pertukaran pesan rahasia, dan kriptografi.

Pelabelan dari graf G(V,E) merupakan suatu fungsi *bijektif* dari $V \cup E$ ke himpunan bilangan asli (N). Dimana domain dari pelabelan merupakan pelabelan titik (atau pelabelan sisi). Jika domain merupakan gabungan dari himpunan titik dan sisi, maka dinamakan pelabelan total [1]. Pelabelan yang sangat terkenal salah satunya adalah pelabelan *graceful*. Terdapat bermacam pelabelan *graceful*, diantaranya yaitu pelabelan *graceful* titik, pelabelan *graceful* sisi, pelabelan super sisi *graceful*, pelabelan *graceful* kuat, dan masih banyak lagi.

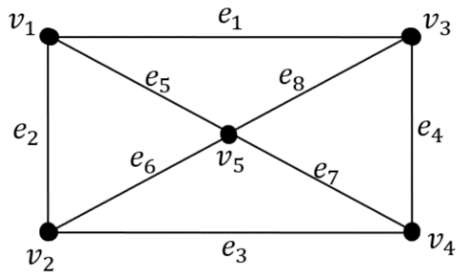
Penelitian terkait dengan pelabelan *graceful* sudah banyak dilakukan, diantaranya: Pelabelan *Super Graceful* untuk Beberapa Graf Khusus oleh Anjani dkk (2012) [2]; Graf Komplit Reguler K-Partit, Graf Roda, Graf Bisikel, Dan Graf Trisikel Oleh Sari dkk (2013) [3]; Pelabelan

Graceful Sisi Pada Graf Komplit, Pelabelan *Graceful* Ganjil Pada Graf Duplikasi Dan Split Bintang oleh Bantara dkk (2018) [4]; *Graceful Labeling on Thorny-Snake Graphs* oleh Maryana (2022) [5]; Pelabelan *Odd-Graceful* Pada Graf Produk Sisir oleh Daniel dkk (2022) [6]; Kemampuan Mahasiswa dalam Membuktikan Teorema pada Pelabelan *Graceful Graph* A-Bintang oleh Sumardi dkk (2022)[7]; Pelabelan Anggun Graf Berlian Rangkap Berbintang, Beberapa Kelas Graf Pohon, Dan Graf Corona Khusus oleh Affifah dkk (2023) [8]. Penelitian ini merupakan penelitian lanjutan dari penelitian sebelumnya. Adapun beberapa penelitian tentang ini yang pernah peneliti lakukan yaitu Pelabelan *Vertex-Graceful* pada Beberapa Graf oleh Medika (2019)[9] dan Pelabelan *Vertex-Graceful* pada Graf-(6,8)[10]. Berdasarkan uraian pada latar belakang di atas, peneliti tertarik untuk mengkaji tentang Pelabelan *Vertex Graceful* pada Graf-(5,7). Rumusan masalah pada artikel ini berdasarkan latar belakang di atas, yaitu Bagaimana menentukan pelabelan *vertex-graceful* pada graf-(5,7)?.

Pada bagian ini akan diperkenalkan konsep-konsep dasar, pengertian, notasi dan istilah pada teori graf, serta beberapa jenis graf, definisi dari fungsi dan pelabelan secara umum.

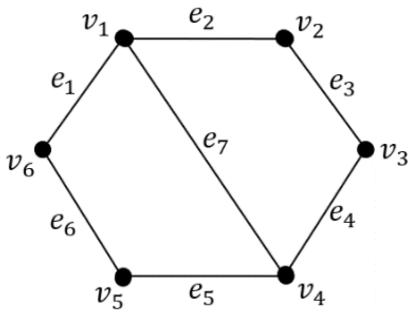
1.1 Definisi dan Notasi

Graf G didefinisikan sebagai pasangan himpunan (V, E), dinotasikan dengan $G = (V, E)$ dengan V merupakan himpunan titik-titik (*vertices* atau *node*) di G dan E merupakan himpunan sisi-sisi (*edges*) yang menghubungkan dua titik di G. Himpunan titik-titik pada G dinotasikan dengan $V(G)$, dan himpunan sisi-sisi pada G disimbolkan dengan $E(G)$ [11]. Jadi, G yang terdiri dari p titik dan q sisi dapat ditulis $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ dan $E(G) = \{e_1, e_2, \dots, e_q\}$ dimana $e_i = (v_j, v_k)$ dengan $v_j, v_k \in V(G)$, $j \neq k$ dan $j, k \in \{1,2,\dots,p\}$. Banyak titik yang terdapat pada graf G adalah $|V(G)|$, dikatakan dengan **orde** dari G, selanjutnya jumlah sisi pada graf G merupakan $|E(G)|$, disebut dengan **ukuran** dari G.



Gambar 1. Graf G_1

Pada Gambar 1 dimisalkan graf G_1 mempunyai titik $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ dan sisi $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8\}$. Jadi, $|V(G)| = 5$ dan $|E(G)| = 8$. Jika sisi $e = (u, v)$ dengan $u, v \in V(G)$, maka titik u dikatakan **bertetangga** dengan titik v begitu juga sebaliknya. Dimana, sisi e disebut **terkait** dengan titik u dan v, juga titik u dan v disebut terkait dengan sisi e. Jumlah sisi yang terkait dengan titik v disebut **derajat** titik v, ditulis dengan $d(v)$.



Gambar 2 Graf G_2

http://dx.doi.org/10.30983/ lattice.v4i1.8670

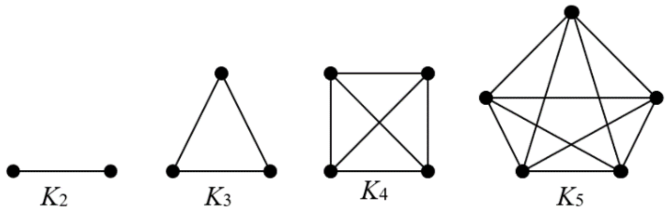
Pada graf G_2, titik v_1 bertetangga dengan titik v_2, v_6, dan v_4, tetapi tidak bertetangga dengan titik v_5 dan v_3. Sisi e_2 terkait dengan titik v_1 dan v_2. Suatu sisi e dikatakan ***loop***, jika $e = (v, v)$ untuk suatu $v \in V(G)$. Suatu sisi dikatakan **sisi ganda** (*multiple edge*), jika ada lebih dari satu sisi yang terkait dengan 2 titik. Graf G dikatakan **graf sederhana** jika graf G tidak memuat *loop* atau sisi ganda [12]. Suatu graf G yang tidak sederhana disebut ***pseudograph***. Graf yang banyak titiknya n berhingga dikatakan **graf berhingga**. Dua buah graf G_1 dan G_2 disebut ***isomorf*** jika ada korespondensi satu-satu antara titik di G_1 dan titik di G_2. Untuk selanjutnya, tanpa mengurangi perumuman, permasalahan dibatasi pada graf-(5,7) yaitu graf dengan 5 titik dan 7 sisi, yang merupakan graf sederhana terhubung berhingga.

1.2 Jenis-Jenis Graf

Adapun beberapa jenis graf sederhana khusus yang sering ditemukan yaitu:[13]

a. Graf Lengkap

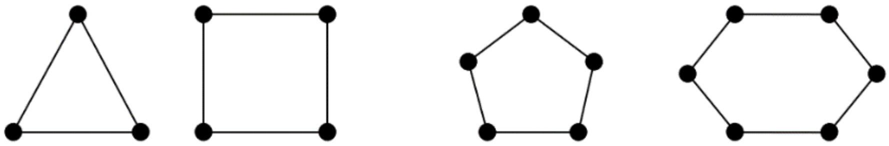
Graf Lengkap merupakan graf sederhana yang tiap titiknya saling bertetangga. Graf lengkap dengan banyak n titik disimbolkan dengan K_n.



Gambar 3. Graf Lengkap

b. Graf Lingkaran

Graf lingkaran merupakan graf sederhana yang tiap titiknya berderajat dua. Graf lingkaran dengan n titik disimbolkan dengan C_n. Gambar 4 adalah gambar graf lingkaran C_n , dengan $3 \leq n \leq 6$.



Gambar 4. Graf Lingkaran

1.3 Fungsi

Misalkan A dan B merupakan dua himpunan yang tak kosong. Suatu cara atau aturan yang memasangkan tiap anggota dari himpunan A dengan tepat satu anggota di himpunan B dikatakan fungsi dari himpunan A ke himpunan B. Fungsi dari himpunan A ke himpunan B diberi simbol f, yaitu: $f: A \rightarrow B$.

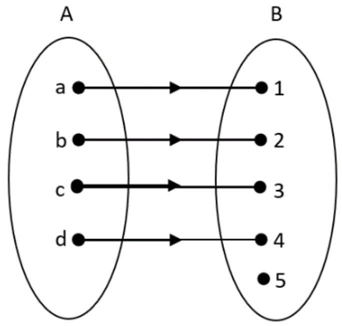
Selanjutnya, himpunan A dikatakan sebagai daerah/ wilayah asal (*domain*) dan himpunan B dikatakan sebagai daerah/ wilayah kawan (*kodomain*). Secara umum, fungsi terbagi menjadi tiga, yaitu:[14]

(1) Fungsi satu-satu (*injektif*) merupakan fungsi dimana setiap anggota di daerah *kodomain* yang mempunyai pasangan anggota tepat satu di wilayah *domain*, dalam matematika dapat ditulis sebagai berikut:

$f: A \rightarrow B$ dikatakan *injektif* $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in A,\ x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

http://dx.doi.org/10.30983/ lattice.v4i1.8670

Contoh:

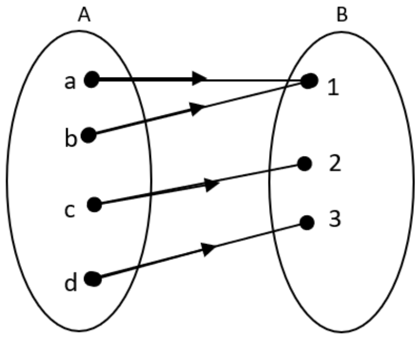


Gambar 5. Fungsi *injektif*

(2) Fungsi pada (*surjektif*) merupakan fungsi dimana semua anggota di daerah *kodomain* yang mempunyai pasangan anggota di wilayah *domain*, dalam matematika dapat ditulis sebagai berikut:

$f: A \to B$ dikatakan *surjektif* $\Leftrightarrow \forall y \epsilon B, \exists x \epsilon A \ni y = f(x)$

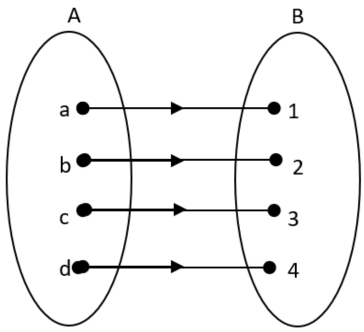
Contoh:



Gambar 6. Fungsi *surjektif*

(3) Fungsi satu-satu dan pada (*bijektif*) adalah fungsi yang memenuhi fungsi satu-satu (*injektif)* dan fungsi pada (*surjektif)*.

Contoh:



Gambar 7. Fungsi *bijektif*

1.4 Pelabelan *Graceful*

Suatu graf G dengan banyak p titik dan q sisi merupakan **pelabelan *graceful*** jika ada fungsi *injektif* $f: V \to \{0,1, \cdots, q\}$ sehingga $f^*: E(G) \to \{1,2, \cdots, q\}$ yang didefinisikan sebagai $f^*(e_i) = |f(v_j) - f(v_k)|$ dimana $e_i = (v_j, v_k)$ adalah fungsi *surjektif* [15].

http://dx.doi.org/10.30983/ lattice.v4i1.8670

Suatu graf G disebut **pelabelan *vertex-graceful*** jika terdapat pelabelan $f: V(G) \to \{1,2,\cdots,p\}$ sedemikian hingga ada pelabelan $f^+: E(G) \to Z_q$ yang didefinisikan dari $f^+\left((v_j, v_k)\right) = \left(f(v_j) + f(v_k)\right)\ mod\ q$ disebut fungsi *bijektif* [15]. Adapun contoh untuk pelabelan *vertex-graceful* adalah sebagai berikut:

Diberikan graf $C_4 \cup K_1$ dengan orde 5, akan ditunjukkan graf tersebut mempunyai pelabelan *vertex-graceful*.

Jawab:

Misalkan $V(C_4 \cup K_1) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ dan definisikan

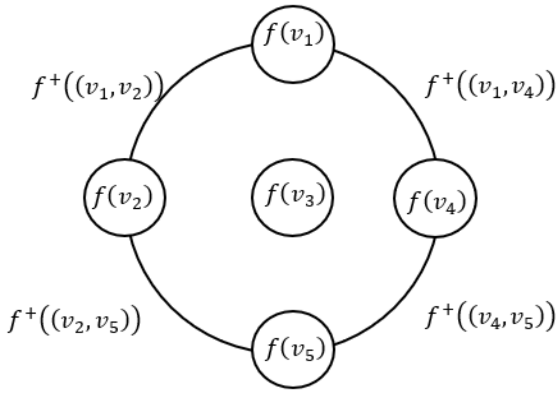
$$f: V(C_4 \cup K_1) \to \{1,2,3,4,5\}.$$

$$v_1 \mapsto 1, v_2 \mapsto 4, v_3 \mapsto 2, v_4 \mapsto 5, v_5 \mapsto 3,$$

dan $f^+: E(C_4 \cup K_1) \to Z_q$ dimana $q = 4$.

$$(v_j, v_k) \mapsto \left(f(v_j) + f(v_k)\right)\ mod\ 4, \quad j \neq k.$$

Akan dibuktikan apakah pelabelan di atas adalah pelabelan *vertex-graceful*.



Gambar 8. Ilustrasi Pelabelan *vertex-graceful* Graf $C_4 \cup K_1$ dengan Orde 5

Dari definisi fungsi diperoleh

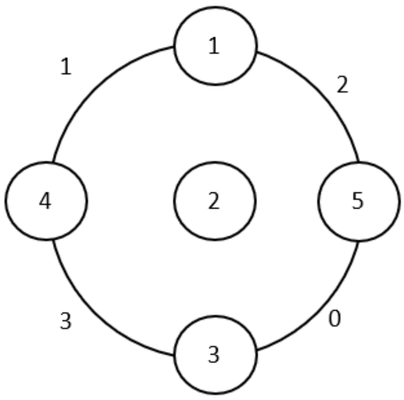
$f^+\left((v_1, v_2)\right) = \left(f(v_1) + f(v_2)\right)\ mod\ 4 = (1+4)\ mod\ 4 = 1$

$f^+\left((v_1, v_4)\right) = \left(f(v_1) + f(v_4)\right)\ mod\ 4 = (1+5)\ mod\ 4 = 2$

$f^+\left((v_2, v_5)\right) = \left(f(v_2) + f(v_5)\right)\ mod\ 4 = (4+3)\ mod\ 4 = 3$

$f^+\left((v_4, v_5)\right) = \left(f(v_4) + f(v_5)\right)\ mod\ 4 = (5+3)\ mod\ 4 = 0.$

Dengan mensubtitusi nilai-nilai yang telah didapatkan, maka diperoleh graf yang sudah dilabeli seperti pada Gambar 9:



Gambar 9. Graf $C_4 \cup K_1$ adalah Pelabelan *vertex-graceful*

Karena $f^+: E(C_4 \cup K_1) \to \{0,1,2,3\}$ merupakan fungsi *bijektif* maka pelabelan di atas merupakan pelabelan *vertex-graceful*.

http://dx.doi.org/10.30983/ lattice.v4i1.8670

2. Metode Penelitian

Jenis penelitian yang digunakan dalam penelitian ini adalah penelitian deskriptif. Penelitian ini menggunakan pendekatan kualitatif. Selain itu, jenis penelitian ini adalah penelitian deskriptif kualitatif. Penelitian deskriptif kualitatif ini dilakukan dengan mengumpulkan kata dan frasa dari individu, buku, dan sumber lain [16]. Tujuan utama penelitian kualitatif adalah memahami dan mengembangkan fenomena utama yang diteliti untuk mencapai pemahaman lebih dalam dan menemukan keunikannya [17].

Subjek penelitian ini yaitu pelabelan *vertex-graceful* dan juga graf-(5,7). Sumber data primer yaitu buku dan literatur yang berhubungan dengan pelabelan *vertex-graceful* dan juga graf-(5,7). Sedangkan sumber data sekunder yaitu beberapa buku, beberapa jurnal dan tugas akhir serta literatur ilmiah yang mendukung dan berkaitan dengan pelabelan *vertex-graceful* pada graf-(5,7) ini.

Teknik yang digunakan dalam penelitian ini adalah penelitian kepustakaan (*study literature*), merupakan proses mencari, membaca, memahami dan menganalisis berbagai literatur yang berkaitan dengan hasil penelitian atau penelitian yang relevan dengan penelitian yang dilakukan [16]. Yaitu dengan memahami beberapa buku, beberapa jurnal dan tugas akhir serta pustaka-pustaka lain yang menjadi landasan teori yang berhubungan dengan pelabelan *vertex-graceful* seperti yang tercantum pada daftar pustaka dan juga mencoba latihan-latihan.

Berikut langkah-langkah yang dilaksanakan pada penelitian ini adalah: (a) Pertama-tama peneliti menjelaskan konsep-konsep dasar, pengertian, symbol serta istilah-istilah pada teori graf dan beberapa jenis graf sederhana. (b) Peneliti juga akan memberikan definisi pelabelan *graceful* secara umum. (c) Selanjutnya, peneliti akan membahas terkait pelabelan *vertex-graceful* pada graf-(5,7).

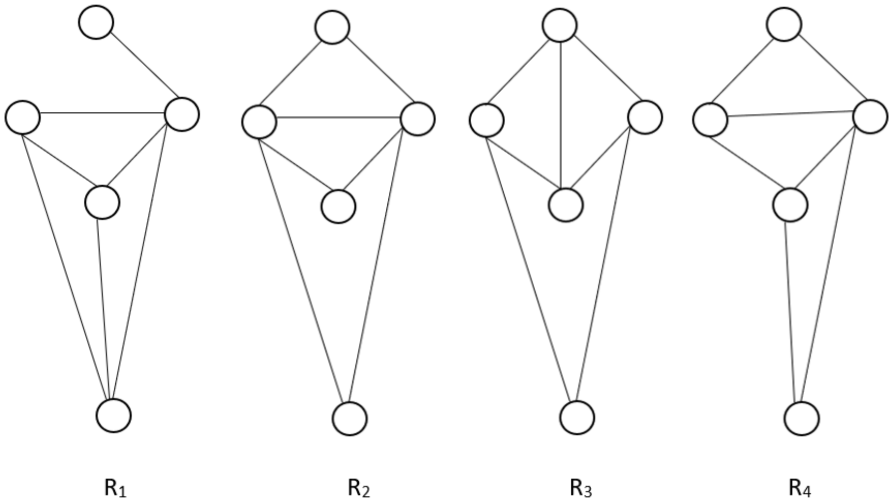
Teknik analisis data yang dipakai yaitu teknik analisis data *non statistic*, dimana Teknik ini dilakukan dengan cara dipaparkan, ditabulasi serta ditafsirkan/ disimpulkan. Adapun langkah-langkah yang digunakan dalam menganalisis data pada penelitian ini yaitu: 1. Mendefinisikan graf-(5,7); 2. Menetapkan jumlah graf-(5,7) berbeda yang tidak *isomorf*; 3. Menerapkan operasi graf sesuai dengan definisi pelabelan *vertex-graceful*; 4. Melabeli semua titik dan sisi yang ada pada semua graf-(5,7) yang telah ditetapkan; 5. Menentukan graf-(5,7) yang merupakan pelabelan *vertex-graceful*; 6. Melaporkan hasil.

3. Hasil dan Pembahasan

Teorema 3.1

Diantara 4 graf-(5,7) seperti yang ditunjukkan pada Gambar semua grafnya merupakan pelabelan *vertex-graceful*

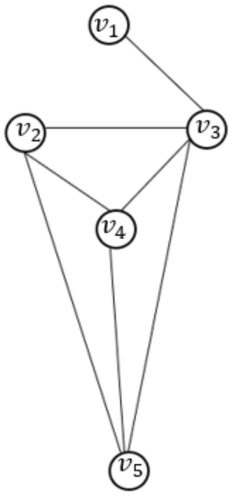
http://dx.doi.org/10.30983/ lattice.v4i1.8670



Gambar 10. Graf-(5,7)

Bukti.

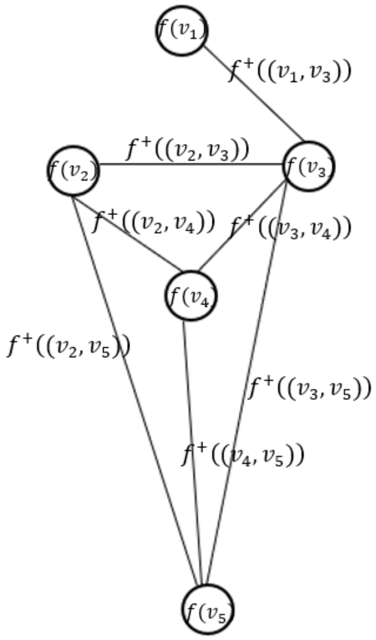
a. Untuk Graf R_1 (ada 120 kemungkinan). Misalkan
$V(R_1) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$



Gambar 11. Graf R_1

Kemungkinan pertama, definisikan $f: V(R_1) \rightarrow \{1,2,3,4,5\}$
$v_1 \mapsto 1, v_2 \mapsto 2, v_3 \mapsto 3, v_4 \mapsto 4, v_5 \mapsto 5,$
Dan $f^+: E(R_1) \rightarrow Z_q$ Dimana $q = 7$.
$(v_j, v_k) \mapsto \left(f(v_j) + f(v_k)\right) mod\ 7, j \neq k$
Akan ditunjukkan apakah pelabelan di atas merupakan pelabelan *vertex-graceful*.

http://dx.doi.org/10.30983/ lattice.v4i1.8670



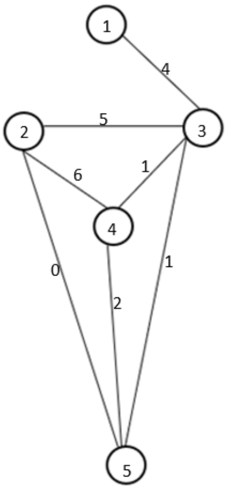
Gambar 12. Ilustrasi Pelabelan *vertex-graceful* Graf R1 (I)*

(I)Menyatakan kemungkinan pertama dari Graf R1

Dari definisi fungsi diperoleh

$$f^+\big((v_1,v_3)\big) = \big(f(v_1)+f(v_3)\big)\ mod\ 7 = (1+3)\ mod\ 7 = 4$$
$$f^+\big((v_2,v_3)\big) = \big(f(v_2)+f(v_3)\big)\ mod\ 7 = (2+3)\ mod\ 7 = 5$$
$$f^+\big((v_2,v_4)\big) = \big(f(v_2)+f(v_4)\big)\ mod\ 7 = (2+4)\ mod\ 7 = 6$$
$$f^+\big((v_2,v_5)\big) = \big(f(v_2)+f(v_5)\big)\ mod\ 7 = (2+5)\ mod\ 7 = 0$$
$$f^+\big((v_3,v_4)\big) = \big(f(v_3)+f(v_4)\big)\ mod\ 7 = (3+4)\ mod\ 7 = 0$$
$$f^+\big((v_3,v_5)\big) = \big(f(v_3)+f(v_5)\big)\ mod\ 7 = (3+5)\ mod\ 7 = 1$$
$$f^+\big((v_4,v_5)\big) = \big(f(v_4)+f(v_5)\big)\ mod\ 7 = (4+5)\ mod\ 7 = 2$$

Dengan memasukkan nilai-nilai di atas, diperoleh graf yang sudah dilabeli sebagai berikut:



Gambar 13. Pelabelan *vertex-graceful* Graf R1 (I) yang sudah dilabeli (I)

http://dx.doi.org/10.30983/ lattice.v4i1.8670

Karena ada beberapa sisi yang mempunyai label yang sama maka pelabelan di atas bukanlah pelabelan *vertex-graceful*. Pelabelan graf di atas dapat ditulis dalam bentuk tabel sebagai berikut:

Tabel 1. Pelabelan *vertex-graceful* Graf R1 (I)

f					f^+							Ket
v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	(v_1, v_3)	(v_2, v_3)	(v_2, v_4)	(v_2, v_5)	(v_3, v_4)	(v_3, v_5)	(v_4, v_5)	
1	2	3	4	5	4	5	6	0	0	1	2	Tidak

Keterangan:

"Tidak" berarti pelabelan tersebut bukan pelabelan *vertex-graceful* karena ada beberapa sisi yang mempunyai label/angka yang sama.

Dengan cara sama seperti cara di atas diperoleh tabel untuk memeriksa apakah suatu graf tersebut pelabelan *vertex-graceful* atau tidak. Dari 120 kemungkinan hanya 12 yang merupakan pelabelan *vertex-graceful*.

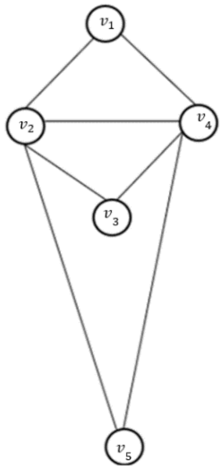
Tabel 2. Pelabelan *vertex-graceful* Graf R1

v1	v2	v3	v4	v5	v1v3	v2v3	v2v4	v2v5	v3v4	v3v5	v4v5
2	3	1	4	5	3	4	0	1	5	6	2
2	3	1	5	4	3	4	1	0	6	5	2
2	4	1	3	5	3	5	0	2	4	6	1
2	4	1	5	3	3	5	2	0	6	4	1
2	5	1	3	4	3	6	1	2	4	5	0
2	5	1	4	3	3	6	2	1	5	4	0
4	1	5	2	3	2	6	3	4	0	1	5
4	1	5	3	2	2	6	4	3	1	0	5
4	2	5	1	3	2	0	3	5	6	1	4
4	2	5	3	1	2	0	5	3	1	6	4
4	3	5	1	2	2	1	4	5	6	0	3
4	3	5	2	1	2	1	5	4	0	6	3

Dari Tabel 3 dapat dilihat bahwa pada graf R1 terdapat 12 pelabelan *vertex-graceful*. Jadi, graf R1 merupakan pelabelan *vertex-graceful*.

http://dx.doi.org/10.30983/ lattice.v4i1.8670

b. Untuk Graf R_2 (ada 120 kemungkinan). Misalkan $V(R_2) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$



Gambar 14. Graf R_2

Dengan cara sama seperti cara sebelumnya diperoleh tabel untuk memeriksa apakah suatu graf tersebut pelabelan *vertex-graceful* atau tidak. Dari 120 kemungkinan hanya 12 yang merupakan pelabelan *vertex-graceful*.

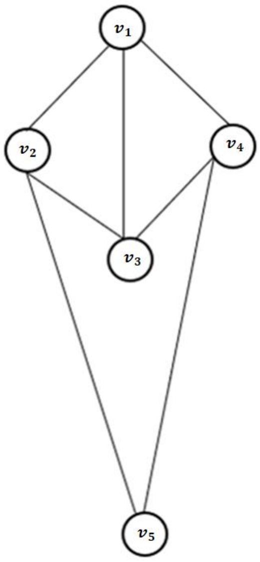
Tabel 3. Pelabelan *vertex-graceful* Graf R2

v1	v2	v3	v4	v5	v1,v2	v1,v4	v2,v3	v2,v4	v2,v5	v3,v4	v4,v5
2	1	3	5	4	3	0	4	6	5	1	2
2	1	4	5	3	3	0	5	6	4	2	1
2	5	3	1	4	0	3	1	6	2	4	5
2	5	4	1	3	0	3	2	6	1	5	4
3	1	2	5	4	4	1	3	6	5	0	2
3	1	4	5	2	4	1	5	6	3	2	0
3	5	2	1	4	1	4	0	6	2	3	5
3	5	4	1	2	1	4	2	6	0	5	3
4	1	2	5	3	5	2	3	6	4	0	1
4	1	3	5	2	5	2	4	6	3	1	0
4	5	2	1	3	2	5	0	6	1	3	4
4	5	3	1	2	2	5	1	6	0	4	3

Dari Tabel 4 dapat dilihat bahwa pada graf R2 terdapat 12 pelabelan *vertex-graceful*. Jadi, graf R2 merupakan pelabelan *vertex-graceful*.

http://dx.doi.org/10.30983/ lattice.v4i1.8670

c. Untuk Graf R_3 (ada 120 kemungkinan). Misalkan $V(R_3) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$



Gambar 15. Graf R_3

Dengan cara sama seperti cara sebelumnya diperoleh tabel untuk memeriksa apakah suatu graf tersebut pelabelan *vertex-graceful* atau tidak. Dari 120 kemungkinan hanya 13 yang merupakan pelabelan *vertex-graceful*.

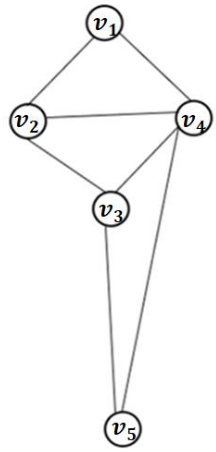
Tabel 4. Pelabelan *vertex-graceful* Graf R3

v1	v2	v3	v4	v5	v1,v2	v1,v3	v1,v4	v2,v3	v2,v4	v3,v4	v4,v5
1	2	3	4	5	3	4	5	5	6	0	2
1	2	3	5	4	3	4	6	5	0	1	2
1	3	2	5	4	4	3	6	5	1	0	2
2	1	3	5	4	3	5	0	4	6	1	2
2	3	1	5	4	5	3	0	4	1	6	2
3	1	2	5	4	4	5	1	3	6	0	2
3	2	1	5	4	5	4	1	3	0	6	2
3	4	5	1	2	0	1	4	2	5	6	3
3	5	4	1	2	1	0	4	2	6	5	3
4	3	5	1	2	0	2	5	1	4	6	3
4	5	3	1	2	2	0	5	1	6	4	3
5	3	4	1	2	1	2	6	0	4	5	3
5	4	3	1	2	2	1	6	0	5	4	3

Dari Tabel 4 dapat dilihat bahwa pada graf R3 terdapat 13 pelabelan *vertex-graceful*. Jadi, graf R3 merupakan pelabelan *vertex-graceful*.

http://dx.doi.org/10.30983/ lattice.v4i1.8670

d. Untuk Graf R_4 (ada 120 kemungkinan). Misalkan $V(R_4) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$



Gambar 16. Graf R_4

Dengan cara sama seperti cara sebelumnya diperoleh tabel untuk memeriksa apakah suatu graf tersebut pelabelan *vertex-graceful* atau tidak. Dari 120 kemungkinan hanya 8 yang merupakan pelabelan *vertex-graceful*.

Tabel 5. Pelabelan *vertex-graceful* Graf R4

v1	v2	v3	v4	v5	v1,v2	v1,v4	v2,v3	v2,v4	v3,v4	v3,v5	v4,v5
1	2	4	3	5	3	4	6	5	0	2	1
1	3	5	2	4	4	3	1	5	0	2	6
2	1	3	4	5	3	6	4	5	0	1	2
2	1	5	3	4	3	5	6	4	1	2	0
4	5	1	3	2	2	0	6	1	4	3	5
4	5	3	2	1	2	6	1	0	5	4	3
5	3	1	4	2	1	2	4	0	5	3	6
5	4	2	3	1	2	1	6	0	5	3	4

Dari Tabel 5 dapat dilihat bahwa pada graf R4 terdapat 8 pelabelan *vertex-graceful*. Jadi, graf R4 merupakan pelabelan *vertex-graceful*. Jadi dari 4 graf-(5,7) semuanya merupakan pelabelan *vertex-graceful*.

4. Kesimpulan

Berdasarkan hasil yang telah didapatkan maka disimpulkan bahwa pada graf-(5,7) semuanya merupakan pelabelan *vertex-graceful* yaitu R1, R2, R3, dan R4. Pada masing-masing graf terdapat 120 kemungkinan, dimana pada R1 terdapat 12 pelabelan *vertex-graceful*, R2 terdapat 12 pelabelan *vertex-graceful*, R3 terdapat 13 pelabelan *vertex-graceful* dan R4 terdapat 8 pelabelan *vertex-graceful*. Adapun saran peneliti untuk penelitian selanjutnya agar meneliti pelabelan *vertex-graceful* pada graf (n,n+2).

Daftar Pustaka

[1] M. Miller, “Open Problems in Graph Theory : Labeling and Extremal Graph,” 2000.
[2] B. Anjani, Primas Tri Anjar, Heri, Robertus, & Surarso, “Pelabelan Super Graceful Untuk Beberapa Graf Khusus,” pp. 183–203, 2012, [Online]. Available:

http://dx.doi.org/10.30983/ lattice.v4i1.8670

https://ejournal3.undip.ac.id/index.php/matematika/article/view/1238
[3] B. R. Dian Noer Indah Sari, "Komplit Reguler K-Partit, Graf Roda, Graf Bisikel, Dan Graf Trisikel," pp. 1–7, 2013, [Online]. Available: https://ejournal.unesa.ac.id/index.php/mathunesa/article/view/2637
[4] J. A. Bantara, I. W. Sudarsana, and S. Musdalifah, "Pelabelan Graceful Ganjil Pada Graf Duplikasi Dan Split Bintang," *J. Ilm. Mat. Dan Terap.*, vol. 15, no. 1, pp. 28–35, 2018, doi: 10.22487/2540766x.2018.v15.i1.10193.
[5] Maryana and K. A. Sugeng, "Graceful Labeling on Thorny-Snake Graphs," *THETA J. Pendidik. Mat.*, vol. 3, no. 2, pp. 55–58, 2022, doi: https://doi.org/10.35747/t.v3i2.137.
[6] J. Daniel, Z. Zidane Barack, P. Setya Ilham, and K. Ariyanti Sugeng, "Pelabelan Odd-Graceful Pada Graf Produk Sisir (Odd Graceful Labelling on Comb Product Graph)," *Maj. Ilm. Mat. dan Stat.*, vol. 22, no. 1, pp. 30–42, 2022, [Online]. Available: https://jurnal.unej.ac.id/index.php/MIMS/index
[7] H. Sumardi, A. Susanta, and T. Alfra Siagian, "Kemampuan Mahasiswa dalam Membuktikan Teorema pada Pelabelan Graceful Graph A-Bintang," *JPMR J. Pendidik. Mat. Raflesia*, vol. 07, no. 01, pp. 35–43, 2022, [Online]. Available: https://ejournal.unib.ac.id/index.php/jpmr
[8] L. Affifah and I. K. Budayasa, "Pelabelan Anggun Graf Berlian Rangkap Berbintang, Beberapa Kelas Graf Pohon, Dan Graf Corona Khusus," *MATHunesa J. Ilm. Mat.*, vol. 11, no. 3, pp. 368–382, 2023.
[9] G. H. Medika, "Pelabelan Vertex-Graceful Pada Beberapa Graf," in *Prosiding Seminar Nasional STKIP PGRI Sumatera Barat*, 2019, pp. 54–65. [Online]. Available: http://econference.stkip-pgri-sumbar.ac.id/index.php/matematika/IPME/paper/view/761
[10] G. H. Medika and Z. B. Tomi, "Pelabelan vertex-graceful pada graf-(6,8)," vol. 6, no. 1, pp. 63–70, 2022, [Online]. Available: https://ejournal.uinib.ac.id/jurnal/index.php/matheduca/article/view/3479
[11] N.Hartsfield and G.Ringel, *Pearls in Graph Theory*. San Diego: Academic Press, 1990.
[12] T. Wahyuningrum and E. Usada, *Matematika Diskrit : Dan Penerapannya Dalam Dunia Informasi*. Sleman: deepublish, 2019.
[13] R. Munir, *Matematika Diskrit Edisi ke 7*. Bandung: Informatika, 2020.
[14] B. R. G and D. R. Sherbert, *Introduction to Real Analisys Third Edition*. New York: John Wiley & Sons, 2000.
[15] S.-M. Lee, Y.C.Pan, and M.-C. Tsai, "On vertex-graceful (p,p+1)-graphs," 2005, p. 172.
[16] N. Martono, *Metode penelitian kuantitatif : analisis isi dan analisis data sekunder*. Jakarta: Rajawali Pers, 2014.
[17] Sugiyono, *Metode penelitian kualitatif : (untuk penelitian yang bersifat : eksploratif, enterpretif, interaktif dan konstruktif)*. Bandung: Alfabeta, 2020.

http://dx.doi.org/10.30983/ lattice.v4i1.8670